UNIDAD 3

EXPERIMENTOS CON UN SOLO FACTOR Y BLOQUES ALEATORIZADOS

TEMA 3: DISEÑO DE EXPERIMENTOS Y ANÁLISIS DE VARIANZAS

Diseño de experimentos e identificación de factores clave

Juan Pablo Sucre Reyes

Técnicas para comparar dos poblaciones

Estudio estadístico experimental: realizar un experimento para generar los datos

- Comienza con la identificación de la variable de interés. Luego se identifican y controlan una o más variables que se cree están relacionadas con la de interés, y se recogen datos de ello ($\neq$ *estudio observacional:* encuestas por muestreo)
- 3 tipos de diseños de experimentos: *diseño completamente aleatorizado, diseño de bloques aleatorizado y experimento factorial*. Para ellos existe un procedimiento estadístico: *análisis de varianza(ANOVA)*, para analizar los datos disponibles.

1. Introducción al diseño de experimentos y al análisis de varianza

- Relaciones de causa y efecto: más fáciles de establecer en estudios experimentales.
- *Ejemplo: Chemitech, Inc. desarrolló un nuevo sistema de filtración para suministros de aguas. Los componentes se comprarán a varios proveedores. El grupo de ingeniería debe determinar el mejor método de ensamble para el nuevo sistema: A, B y C (que difieren en el orden de los pasos para armarlo) para producir el mayor número de sistemas de filtración por semana.*
- *Solución: El método de ensamble es la variable independiente o factor; con tres tipos de ensamble = tres tratamientos (métodos). Éste es un experimento de un solo factor, porque involucra sólo un factor cualitativo (el método de ensamble).*

1. Introducción al diseño de experimentos y al análisis de varianza

- *Ejemplo: Chemitech, Inc. desarrolló un nuevo sistema de filtración para ……*
- *Solución: Los 3 métodos (tratamientos) ⇒ 3 poblaciones (trabajadores que usan el método A, B y C). En c/u la variable dependiente (respuesta) es el número de sistemas de filtración ensamblado/semana. Objetivo estadístico: determinar si el número medio de unidades producidas por semana es el mismo para las 3 poblaciones (métodos).*
- *15 trabajadores son seleccionados aleatoriamente (unidades experimentales) ⇒ diseño completamente aleatorizado: cada método se asigna de manera aleatoria a cinco de ellos (réplicas).*

1.1 Recolección (y análisis) de datos

• *Ejemplo: Chemitech, Inc. desarrolló un nuevo sistema de filtración para ……*

•*Solución: Sea:* μ_1 = número medio de unidades producidas por semana con el método A
μ_2 = número medio de unidades producidas por semana con el método B
μ_3 = número medio de unidades producidas por semana con el método C

• *Ver si cualquiera de las 3 $\overline{x}_i$ observadas difiere lo suficiente como para concluir que las μ_i correspondientes a estos 3 métodos de ensamble son diferentes*

	Method		
	A	B	C
	58	58	48
	64	69	57
	55	71	59
	66	64	47
	67	68	49
X	62	66	52
S^2	27.5	26.5	31.0
S	5.244	5.148	5.568

• *Aunque nunca se podrá saber los valores de μ_i se utilizan las $\overline{x}_i$ para probar:* $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
H_a: no todas las medias poblacionales son iguales

el análisis de varianza (ANOVA) determina si las diferencias observadas entre las $\overline{x}_i$ son lo suficientemente grandes para rechazar H_0.

NOTA: Si H_0 es rechazada, no podemos concluir que todas las μ_i son diferentes. Significa que por lo menos dos μ_i son diferentes.

1.2 Supuestos para el análisis de varianza

•*Ejemplo: Chemitech, Inc. desarrolló un nuevo sistema de filtración para ……*

•1. En cada población, la variable de respuesta está normalmente distribuida. *Implicación: el número de unidades producidas por semana esta normalmente distribuido para cada método de ensamble (A, B y C).*

•2. La varianza de la variable de respuesta, σ^2, es la misma en todas las poblaciones. *Implicación. la varianza en el número de unidades producido por semana debe ser el mismo para cada método de ensamble (A, B y C).*

•3. Las observaciones deben ser independientes. *Implicación: la cantidad de unidades producida por semana por un empleado debe ser independiente de la de cualquier otro*

1.3 Análisis de varianza: una perspectiva conceptual

•*Ejemplo: Chemitech, Inc. desarrolló un nuevo sistema de filtración para ……*

• Si la variabilidad entre las $\bar{x}_i$ es "pequeña", esto favorece H_0; si la variabilidad entre las $\bar{x}_i$ es "grande", esto favorece H_a.

• *Si H_0 es verdadera, se usa la variabilidad entre $\bar{x}_i$ para estimar σ^2 (supuestos obvios):*

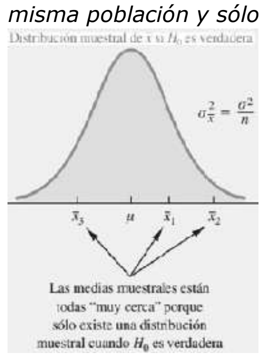
• *Estimación de la media de la distribución muestral de $\bar{x}$: media muestral general.*

$$(62 + 66 + 52)/3 = 60$$

• *Estimación de la varianza de la distribución muestral de $\bar{x}$, $\sigma^2_{\bar{x}}$ se obtiene de la varianza de las 3 medias muestrales.* $s^2_{\bar{x}} = \frac{(62-60)^2 + (66-60)^2 + (52-60)^2}{3-1} = \frac{104}{2} = 52$

• *Como* $\sigma^2 = n\sigma^2_{\bar{x}}$*, se tiene que:* Estimación de $\sigma^2 = n$ (estimación de $\sigma^2_{\bar{x}}$) $= ns^2_{\bar{x}} = 5(52) = 260$ *entre tratamientos.*

•*NOTA: Así c/u de las muestras proviene de la misma población y sólo hay una distribución muestral de $\bar{x}$.*



Juan Pablo Sucre Reyes

1.3 Análisis de varianza: una perspectiva conceptual

•*Ejemplo: Chemitech, Inc. desarrolló un nuevo sistema de filtración para ……*

• Si la variabilidad entre las $\bar{x}_i$ es "pequeña", esto favorece H_0; si la variabilidad entre las $\bar{x}_i$ es "grande", esto favorece H_a.

• *Si H_0 es falsa, suponga que las μ_i son todas diferentes. Como las 3 muestras son de poblaciones normales con medias $\neq$s, darán 3 distribuciones muestrales $\neq$s.*

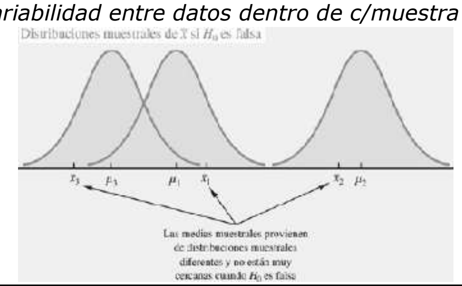
• *La combinación de las estimaciones individuales de σ^2 en una general: estimación conjunta o dentro de los tratamientos de σ^2 (si n_i es igual, promedio de las S):*

$$\text{Estimación de } \sigma^2 \text{ dentro de los tratamientos} = \frac{27.5 + 26.5 + 31.0}{3} = \frac{85}{3} = 28.33$$

• *El cociente entre las 2 estimaciones: 260/28,33=9,18. "Entre tratamientos" sólo da una buena estimación de σ^2 si H_0 es verdadera; si es falsa, sobreestima σ^2. "Dentro de los tratamientos" da una buena estimación de σ^2 en cualquiera de los casos.*

•*NOTA: Si H_0 es verdadera el cociente $\cong 1$; sino el cociente >1.*

• *ANOVA: Compara 2 estimaciones independientes de la σ^2 común (variabilidad entre las $\bar{x}_i$ mismas Vs. variabilidad entre datos dentro de c/muestra $\Rightarrow \mu_i$ son iguales?.*



Juan Pablo Sucre Reyes

2. Análisis de varianza y el diseño completamente aleatorizado

- Uso del análisis de varianza para probar la igualdad de k medias poblacionales. Así:
- $H_0: \mu_1 = \mu_2 \cdots = \mu_k$
  H_a: no todas las medias poblacionales son iguales donde: μ_j = media de la j-ésima población
- De c/u las k poblaciones (tratamientos) se toma una muestra aleatoria simple n_j:
- x_{ij} = valor de la observación i del tratamiento j; $\bar{x}_j$ = media muestral del tratamiento j; s_j = desviación estándar muestral del tratamiento j
  n_j = número de observaciones en el tratamiento j; s_j^2 = varianza muestral del tratamiento j
- Así, la media muestral y la varianza muestral del tratamiento j son: $\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_j}$ $s_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n_j - 1}$
- La media muestral general, $\bar{\bar{x}}$ es: $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_T}$ donde $n_T = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
- Si el tamaño de c/ muestra es n, $n_T = kn$ y así: $\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{kn} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}/n}{k} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j}{k}$
- *Ejemplo: En el experimento de Chemitech, como todas las muestras son de 5 obs., la media muestral general será:* $\bar{\bar{x}} = \frac{62 + 66 + 52}{3} = 60$
- *Si H_0 es verdadera ($\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu$), el valor de 60 es la mejor estimación de μ.*

Juan Pablo Sucre Reyes

2.1 Estimación de la varianza poblacional entre tratamientos

- A la estimación de σ^2 se le llama *cuadrado medio debido a los tratamientos* (*CMTR*):
- $\text{CMTR} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2}{k-1}$ → *suma de cuadrados debido a los tratamientos (SCTR). Así:*

CUADRADO MEDIO DEBIDO A LOS TRATAMIENTOS

$$\text{CMTR} = \frac{\text{SCTR}}{k-1} \quad \text{donde} \quad \text{SCTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$

- Si H_0 es verdadera ($\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu$), el CMTR da una estimación insesgada de σ^2. Sino, el CMTR no es un estimador insesgado de σ^2 (la sobreestima).
- *Ejemplo: En el experimento de Chemitech….*

$$\text{SCTR} = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5(62-60)^2 + 5(66-60)^2 + 5(52-60)^2 = 520$$

$$\text{CMTR} = \frac{\text{SCTR}}{k-1} = \frac{520}{2} = 260$$

Juan Pablo Sucre Reyes

2.2 Estimación de la varianza poblacional dentro de los tratamientos

- A la estimación de σ^2 se le llama cuadrado medio debido al error (CME):
- $\text{CME} = \dfrac{\sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)s_j^2}{n_T - k}$ → *suma de cuadrados debido al error (SCE). Así:*

CUADRADO MEDIO DEBIDO AL ERROR

$$\text{CME} = \frac{\text{SCE}}{n_T - k} \qquad \text{donde} \qquad \text{SCE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)s_j^2$$

- Dado que el CME está basado en la variación dentro de cada tratamiento; el que H_0 sea o no verdadera no tiene ninguna influencia.
- El CME proporciona siempre una *estimación insesgada de σ^2.*
- *Ejemplo: En el experimento de Chemitech….*

$$\text{SCE} = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)s_j^2 = (5-1)27.5 + (5-1)26.5 + (5-1)31 = 340$$

$$\text{CME} = \frac{\text{SCE}}{n_T - k} = \frac{340}{15-3} = \frac{340}{12} = 28.33$$

Juan Pablo Sucre Reyes

2.3 Comparación de las estimaciones de las varianzas: la prueba F

- Si H_0 es verdadera y se satisfacen los supuestos del ANOVA, la distribución muestral del CMTR/CME es una distribución F.

ESTADÍSTICO DE PRUEBA PARA LA IGUALDAD DE k MEDIAS POBLACIONALES

$$F = \frac{\text{CMTR}}{\text{CME}}$$

Este estadístico de prueba sigue una distribución F con $k - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_T - k$ grados de libertad en el denominador.

- Y el procedimiento general para probar la igualdad de k medias poblacionales es:

PRUEBA DE LA IGUALDAD DE k MEDIAS POBLACIONALES

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$
H_a: no todas las medias poblacionales son iguales

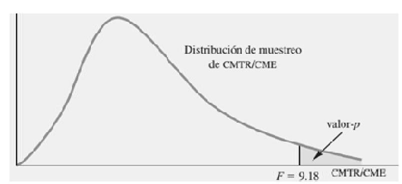
ESTADÍSTICO DE PRUEBA

$$F = \frac{\text{CMTR}}{\text{CME}}$$

REGLA DE RECHAZO

Método del valor-p: Rechazar H_0 si el valor-$p \le \alpha$
Método del valor crítico: Rechazar H_0 si $F \ge F_\alpha$

donde el valor de F_α está basado en una distribución F con $k - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_T - k$ grados de libertad en el denominador.



- *Ejemplo: En el experimento de Chemitech se usará α = 0,05 para realizar la prueba de hipótesis.*
- *Solución: : Paso 1: Establecer H_0 y H_a :* H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$; H_a: no todas las medias poblacionales son iguales
- *Paso 2: Especificar el nivel de significancia: siendo α = 0,05.*
- *Paso 3: Recabar datos muestrales y calcular el valor del estadístico de prueba F:* $F = \dfrac{\text{CMTR}}{\text{CME}} = \dfrac{260}{28.33} = 9.18$
- *Método del valor-p*
- *Paso 4. Emplear el valor de F para calcular el valor-p:*

Área en la cola superior	0.10	0.05	0.025	0.01
Valor F ($gl_1 = 2$; $gl_2 = 12$)	2.81	3.89	5.10	6.93

$F = 9.18$

- *valor-p < 0,01: Tabla F*
- *Paso 5. Regla de decisión:*
- *Como valor-p <α=0,05 ⇒ H_0 es rechazada (las medias de las tres poblaciones no son iguales)*

Juan Pablo Sucre Reyes

2.3 Comparación de las estimaciones de las varianzas: la prueba F

• Si H_0 es verdadera y se satisfacen los supuestos del ANOVA, la distribución muestral del CMTR/CME es una distribución F.

ESTADÍSTICO DE PRUEBA PARA LA IGUALDAD DE k MEDIAS POBLACIONALES

$$F = \frac{CMTR}{CME}$$

Este estadístico de prueba sigue una distribución F con $k - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_T - k$ grados de libertad en el denominador.

• Y el procedimiento general para probar la igualdad de k medias poblacionales es:

PRUEBA DE LA IGUALDAD DE k MEDIAS POBLACIONALES

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$
H_a: no todas las medias poblacionales son iguales

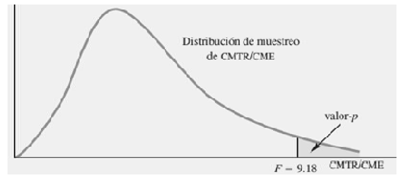
ESTADÍSTICO DE PRUEBA

$$F = \frac{CMTR}{CME}$$

REGLA DE RECHAZO

Método del valor-p: Rechazar H_0 si el valor-$p \leq \alpha$
Método del valor crítico: Rechazar H_0 si $F \geq F_\alpha$

donde el valor de F_α está basado en una distribución F con $k - 1$ grados de libertad en el numerador y $n_T - k$ grados de libertad en el denominador



•*Ejemplo: En el experimento de Chemitech se usará α = 0,05 para realizar la prueba de hipótesis.*

•*Solución: : Paso 1: Establecer H_0 y H_a :* H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$; H_a: no todas las medias poblacionales son iguales

• *Paso 2: Especificar el nivel de significancia: siendo α = 0,05.*

• *Paso 3: Recabar datos muestrales y calcular el valor del estadístico de prueba F:*

$$F = \frac{CMTR}{CME} = \frac{260}{28.33} = 9.18$$

•*Método del valor crítico*

•*Paso 4. Utilizar α para determinar el valor crítico (F_α) y la regla de rechazo:*

• *F_α (2 y 12 g.l.; área de α=0,05 cola superior)= 3,89*

Área en la cola superior	0.10	0.05	0.025	0.01
Valor F ($gl_1 = 2; gl_2 = 12$)	2.81	3.89	5.10	6.93

$F = 9.18$

•*Paso 5. Regla de decisión:*

• *Como 9,18 > 3,90 $\Rightarrow H_0$ es rechazada (las medias de las tres poblaciones no son iguales)*

Juan Pablo Sucre Reyes

2.4 Tabla de ANOVA (análisis de varianza)

• Proceso de partición de la suma total de cuadrados y los g.l. en sus 2 fuentes: *tratamientos y error*. Al dividir las sumas de cuadrados entre los correspondientes g.l., se obtienen las estimaciones de: σ^2, *F* y *valor-p* (prueba de hipótesis).

Tabla ANOVA para un diseño completamente aleatorizado

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	valor-p
Tratamientos	SCTR	$k - 1$	$CMTR = \frac{SCTR}{k-1}$	$\frac{CMTR}{CME}$	
Error	SCE	$n_T - k$	$CME = \frac{SCE}{n_T - k}$		
Total	STC	$n_T - 1$			

• Si se toma todo el conjunto de datos como una sola muestra:

$$STC = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

•*Ejemplo: En el experimento de Chemitech se usará α = 0,05 para ….*

•*Solución:*

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	valor-p
Tratamientos	520	2	260.00	9.18	0.004
Error	340	12	28.33		
Total	860	14			

• *Resultados de computadora para el análisis de varianza:*

Salida de Minitab para el análisis de varianza del experimento de Chemitech

```
Source   DF      SS      MS      F      P
Factor    2   520.0   260.0   9.18  0.004
Error    12   340.0    28.3
Total    14   860.0

S = 5.323   R-Sq = 60.47%   R-Sq(adj) = 53.88%

                               Individual 95% CIs For Mean Based on
                               Pooled StDev
Level   N    Mean   StDev   ---+---------+---------+---------+------
A       5  62.000   5.244              (-------*-------)
B       5  66.000   4.148                    (-------*-------)
C       5  52.000   5.568   (-------*-------)
                            ---+---------+---------+---------+------
Pooled StDev = 5.323          49.0      56.0      63.0      70.0
```

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

método A

$$62 \pm 2.179\frac{5.323}{\sqrt{5}} = 62 \pm 5.19$$

Juan Pablo Sucre Reyes

2.5 Prueba para la igualdad de k medias poblacionales: un estudio observacional

• Se utiliza la misma metodología del ANOVA, aunque siempre existirá una diferencia entre un estudio estadístico observacional y otro experimental.

•*Ejemplo: NCP fabrica impresoras y aparatos de fax en sus 3 plantas (Atlanta, Dallas y Seattle). Para medir los conocimientos de calidad de los empleados de dichas plantas, se toma una muestra aleatoria de 6 empleados de cada planta y se aplica un examen. Probar la hipótesis de que la μ de las puntuaciones es la misma en las 3 plantas.*

	Planta 1 Atlanta	Planta 2 Dallas	Planta 3 Seattle
	85	71	59
	75	75	64
	82	73	62
	76	74	69
	71	69	75
	85	82	67
X	79	74	66
S^2	34	20	32
S	5.83	4.47	5.66

•*Solución: Aunque los verdaderos valores de μ_1, μ_2, μ_3 nunca puedan conocerse, se usarán los resultados muestrales para probar las hipótesis siguientes:*

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

H_a: no todas las medias poblacionales son iguales

•*NOTA: Las personas que realizaron el estudio de NCP no tuvieron control sobre la asignación de las plantas a c/u de los empleados (éstas ya funcionaban y c/u de los sujetos trabajaba en una de las tres). Para clasificarlo como un trabajo experimental, NPC tendría que haber tomado al azar 18 empleados y después, de manera aleatoria, asignar las plantas a cada uno.*

2. Análisis de varianza y el diseño completamente aleatorizado

AUTOevaluación Realice los cálculos del análisis de varianza para el siguiente diseño completamente aleatorizado. Con $\alpha = 0.05$, ¿la diferencia entre las medias de tratamiento (treatment) es significativa?

	Treatment A	B	C
	136	107	92
	120	114	82
	113	125	85
	107	104	101
	131	107	89
	114	109	117
	129	97	110
	102	114	120
		104	98
		89	106
$\bar{x}_j$	119	107	100
s_j^2	146.86	96.44	173.78

2. Análisis de varianza y el diseño completamente aleatorizado

Minitab 15 ► 9. Para estudiar el efecto de la temperatura en el rendimiento de un proceso químico, se produjeron cinco lotes con cada uno de tres niveles de temperatura. Los resultados se presentan a continuación. Establezca la tabla para el análisis de varianza. Use $\alpha = 0.05$ para probar si la temperatura afecta el rendimiento medio del proceso.

Temperatura		
50 °C	60 °C	70 °C
34	30	23
24	31	28
36	34	28
39	23	30
32	27	31

Minitab 15 ► 11. En la publicidad de cuatro pinturas (Paint 1, 2, 3 y 4) se dice que tienen el mismo tiempo de secado. Para verificarlo, se prueban cinco muestras de cada una de las pinturas. Se registra el tiempo en minutos necesario para que el secado sea suficiente para la aplicación de una segunda mano. Los datos obtenidos se listan a continuación.

Paint 1	Paint 2	Paint 3	Paint 4
128	144	133	150
137	133	143	142
135	142	137	135
124	146	136	140
141	130	131	153

Con $\alpha = 0.05$ como nivel de significancia, realice una prueba para determinar si la media de los tiempos de secado es la misma en cada tipo de pintura.

Juan Pablo Sucre Reyes

3. Procedimientos de comparación múltiple: LSD de Fisher

- Determinan dónde están las diferencias entre μ_i (comparaciones entre pares de μ_i).
- Procedimiento de la *diferencia mínima significativa (LSD)*:

PROCEDIMIENTO DE LA LSD DE FISHER

$$H_0: \mu_i = \mu_j$$
$$H_a: \mu_i \neq \mu_j$$

ESTADÍSTICO DE PRUEBA
$$t = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{\mathrm{CME}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

REGLA DE RECHAZO

Método del valor-*p*: Rechazar H_0 si el valor-$p \leq \alpha$

Método del valor crítico: Rechazar H_0 si $t \leq -t_{\alpha/2}$ o $t \geq t_{\alpha/2}$

donde el valor de $t_{\alpha/2}$ se basa en la distribución t con $n_T - k$ grados de libertad

- *Ejemplo: En el experimento de Chemitech, a partir del ANOVA se concluyó que el Nº medio de unidades/ semana no era el mismo con los 3 métodos de ensamble. En tal caso, ¿dónde ocurren las diferencias? Entre las de las poblaciones 1 y 2? ¿O entre las de 1 y 3? ¿O las de las poblaciones 2 y 3?*
- *Solución: : Paso 1: Establecer H_0 y H_a :* $H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_a: \mu_1 \neq \mu_2$
- *Paso 2: Especificar el nivel de significancia: siendo α = 0,05.*

$$t = \frac{62 - 66}{\sqrt{28.33\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)}} = -1.19$$

- *Paso 3: Recabar datos muestrales y calcular el valor del estadístico de prueba t:*
- *Método del valor-p*
- *Paso 4. Emplear el valor del estadístico de prueba para calcular el valor-p:*
- *valor-p =2(0,10 a 0,20)=0,20 a 0,40 (Tablas t: 12 g.l/CME: 2 x área a izq. de -1,19)*
- *Paso 5. Regla de decisión:* Minitab 15 ► 0.2571.
- *Como valor-p > α=0,05⇒ H_0 no es rechazada*
- *(lo producido con el método A: μ_1 es igual a lo obtenido con el B: μ_2)*

Área en la cola superior	0.20	0.10	0.05	0.025
Valor t (12 gl)	0.873	1.356	1.782	2.179

$t = 1.19$

Juan Pablo Sucre Reyes

3. 1 Procedimientos de comparación múltiple: LSD de Fisher basado en

• Determina qué tan grande tiene que ser la diferencia entre las medias muestrales para que H_0 sea rechazada. El estadístico de prueba es: $\bar{x}_i - \bar{x}_j$

PROCEDIMIENTO DE LA LSD DE FISHER BASADO EN EL ESTADÍSTICO DE PRUEBA $\bar{x}_i - \bar{x}_j$

$$H_0: \mu_i = \mu_j$$
$$H_a: \mu_i \neq \mu_j$$

ESTADÍSTICO DE PRUEBA $\bar{x}_i - \bar{x}_j$

REGLA DE RECHAZO PARA EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA α

Rechazar H_0 si $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq \text{LSD}$

donde
$$\text{LSD} = t_{\alpha/2}\sqrt{\text{CME}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

• Si todos los tamaños muestrales son iguales, sólo se necesita calcular un sólo LSD.

•*Ejemplo: En el experimento de Chemitech, establezca si existe diferencias entre las μ_i de las poblaciones 1 y 3. Ó entre las de 2 y 3.*

•*Solución: : Paso 1: Establecer H_0 y H_a :* $H_0: \mu_1 = \mu_3$; $H_a: \mu_1 \neq \mu_3$

• *Paso 2: Especificar el nivel de significancia: siendo α = 0,05.*

• *Paso 3: Recabar datos muestrales y calcular el estadístico de prueba:* $62 - 52 = 10$

•*Método del valor LSD:*

•*Paso 4. Calcular el valor de LSD:*

Área en la cola superior	0.10	0.05	0.025
Value t (12 gl)	1.356	1.782	2.179

$$\text{LSD} = 2.179\sqrt{28.33\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 7.34$$

•*(Tablas t: 12 g.l. del CME=28,33: siendo $\alpha/2$ = 0,025)*

•*Paso 5. Regla de decisión:*

• *Como 10 > 7,34 $\Rightarrow H_0$ es rechazada (la μ_1 del método A no es igual a la μ_3 del C)*

3.1 Procedimientos de comparación múltiple: LSD de Fisher basado en $\bar{x}_i - \bar{x}_j$

• Determina qué tan grande tiene que ser la diferencia entre las medias muestrales para que H_0 sea rechazada. El estadístico de prueba es: $\bar{x}_i - \bar{x}_j$

PROCEDIMIENTO DE LA LSD DE FISHER BASADO EN EL ESTADÍSTICO DE PRUEBA $\bar{x}_i - \bar{x}_j$

$$H_0: \mu_i = \mu_j$$
$$H_a: \mu_i \neq \mu_j$$

ESTADÍSTICO DE PRUEBA $\bar{x}_i - \bar{x}_j$

REGLA DE RECHAZO PARA EL NIVEL DE SIGNIFICANCIA α

Rechazar H_0 si $|\bar{x}_i - \bar{x}_j| \geq \text{LSD}$

donde
$$\text{LSD} = t_{\alpha/2}\sqrt{\text{CME}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

• Si todos los tamaños muestrales son iguales, sólo se necesita calcular un sólo LSD.

•*Ejemplo: En el experimento de Chemitech, establezca si existe diferencias entre las μ_i de las poblaciones 1 y 3. Ó entre las de 2 y 3.*

•*Solución: : Paso 1: Establecer H_0 y H_a :* $H_0: \mu_2 = \mu_3$; $H_a: \mu_2 \neq \mu_3$

• *Paso 2: Especificar el nivel de significancia: siendo α = 0,05.*

• *Paso 3: Recabar datos muestrales y calcular el estadístico de prueba:* $66 - 52 = 14$

•*Método del valor LSD:*

•*Paso 4. Calcular el valor de LSD:*

Área en la cola superior	0.10	0.05	0.025
Value t (12 gl)	1.356	1.782	2.179

$$\text{LSD} = 2.179\sqrt{28.33\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 7.34$$

•*(Tablas t: 12 g.l. del CME=28,33: siendo $\alpha/2$ = 0,025)*

•*Paso 5. Regla de decisión:*

• *Como 14 > 7,34 $\Rightarrow H_0$ es rechazada (la μ_2 del método B no es igual a la μ_3 del C)*

• $\therefore$ *Los resultados tanto del método A como del B difieren de los del método C.*

3.2 Intervalo de confianza de la diferencia entre las medias de dos poblaciones

• LSD de Fisher también se usa para obtener una estimación de dicho intervalo:

ESTIMACIÓN POR INTERVALO DE CONFIANZA DE LA DIFERENCIA ENTRE DOS MEDIAS POBLACIONALES USANDO EL PROCEDIMIENTO DE LA LSD DE FISHER

$$\bar{x}_i - \bar{x}_j \pm \text{LSD}$$

donde

$$\text{LSD} = t_{\alpha/2}\sqrt{\text{CME}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

y $t_{\alpha/2}$ pertenece a la distribución t con $n_T - k$ grados de libertad.

• Si el intervalo hallado incluye el valor cero, no se puede rechazar H_0 (las dos medias poblacionales son iguales). Pero si no lo incluye, está H_a (existe diferencia entre las μ_i)

•*Ejemplo: En el experimento de Chemitech, estime al 95% de confianza el intervalo de la diferencia entre las μ_i de las poblaciones 1 y 2.*

•*Solución: : Recuerde H_0 y H_a:* $H_0\colon \mu_1 = \mu_2$, $H_a\colon \mu_1 \neq \mu_2$ además de: $\text{LSD} = 2.179\sqrt{28.33\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)} = 7.34$

•*Entonces el intervalo para la diferencia μ_1- μ_2:* $62 - 66 \pm 7.34 = -4 \pm 7.34 = -11.34 \text{ a } 3.34$

• $\therefore$ *Como el intervalo incluye el cero, no se puede* rechazar H_0 ($\mu_1 = \mu_2$)

Juan Pablo Sucre Reyes

3.3 Tasas de error tipo I

• LSD de Fisher = *prueba restringida o protegida* de la LSD debido a que sólo se usa si primero se ha encontrado un valor F significativo al aplicar el análisis de varianza.

• *Ejemplo: En el experimento de Chemitech, se usa LSD de Fisher para efectuar 3 pares de comparaciones.*

Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3
$H_0\colon \mu_1 = \mu_2$	$H_0\colon \mu_1 = \mu_3$	$H_0\colon \mu_2 = \mu_3$
$H_a\colon \mu_1 \neq \mu_2$	$H_a\colon \mu_1 \neq \mu_3$	$H_a\colon \mu_2 \neq \mu_3$

• En cada caso, el α = 0,05. Así, en cada prueba, si H_0 es verdadera, la p(cometer un error tipo I) = 0,05; entonces, la p(no cometer un error tipo I)=1-0,05=0,95.

• En comparación múltiple, al α = 0,05 se llama tasa de error tipo I por comparación = nivel de significancia que corresponde a una sola comparación por pares.

• Ahora, la p(no cometer un error tipo I en ninguna de las 3 pruebas)= 0,95 x 0,95 x 0,95 = 0,8574. Por tanto, la p(cometer por lo menos un error tipo I) = 1 - 0,8574 = 0,1426 y se le conoce como *tasa de error tipo I por experimentación o general (α_{EW}).*

• Dicha tasa α_{EW} es mayor en estudios con más poblaciones. Para controlarla se usa en cada prueba tasas α más pequeñas (*ajuste Bonferroni α_{EW}/C; con C comparaciones*)

•NOTA: *Una baja tasa de error tipo I por comparación aumenta el riesgo de cometer un error tipo II.*

Juan Pablo Sucre Reyes

3. Procedimientos de comparación múltiple: LSD de Fisher

AUTO evaluación Los datos siguientes se obtuvieron con un diseño completamente aleatorizado.

	Tratamiento A	Tratamiento B	Tratamiento C
	32	44	33
	30	43	36
	30	44	35
	26	46	36
	32	48	40
Media muestral	30	45	36
Varianza muestral	6.00	4.00	6.50

a) Con $\alpha = 0.05$ como nivel de significancia, ¿puede rechazar la hipótesis nula de que las medias de los tres tratamientos son iguales?

b) Use el procedimiento LSD de Fisher para probar si existe una diferencia significativa entre las medias de los tratamientos A y B, A y C, y B y C. Use $\alpha = 0.05$.

c) Utilice el procedimiento LSD de Fisher para obtener una estimación por intervalo de 95% de confianza para la diferencia entre las medias de los tratamientos A y B.

Juan Pablo Sucre Reyes

3. Procedimientos de comparación múltiple: LSD de Fisher

AUTO evaluación 18. Para probar si existe una diferencia significativa entre cuatro máquinas respecto del número de horas entre dos averías, se obtuvieron los datos siguientes.

Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3	Máquina 4
6.4	8.7	11.1	9.9
7.8	7.4	10.3	12.8
5.3	9.4	9.7	12.1
7.4	10.1	10.3	10.8
8.4	9.2	9.2	11.3
7.3	9.8	8.8	11.5

a) Con $\alpha = 0.05$, como nivel de significancia, ¿cuál es la diferencia, si hay alguna, entre las medias poblacionales de los tiempos de las cuatro máquinas?

b) Use el procedimiento LSD de Fisher para probar la igualdad de las medias en las máquinas 2 y 4. Utilice 0.05 como nivel de significancia.

Juan Pablo Sucre Reyes

4. Diseño de bloques aleatorizado (unidades experimentales muy heterogéneas)

- Controla algunas fuentes ajenas de variación eliminándolas del CME; y proporciona una mejor estimación de la varianza del error y conduce a pruebas de hipótesis más sólidas ó de su capacidad para detectar diferencias entre medias de tratamientos.
- *Ejemplo: Como resultado de un estudio para medir la fatiga y el estrés de los controladores de tráfico aéreo, se propusieron rediseños a su estación de trabajo. Se seleccionaron 3 alternativas con el mayor potencial para reducir el estrés. Se diseña un experimento que mida el estrés de los controladores bajo cada alternativa.*
- *Solución: se emplea una sola muestra de 6 controladores (bloques) y c/u de ellos se prueba con cada una de las 3 alternativas (tratamientos o poblaciones) de puestos de trabajo (factor de interés): sistema A, sistema B y sistema C. Después de la entrevista y examen médico a c/u, se midió el estrés de cada controlador en c/u de los sistemas.*

Diseño de bloques aleatorizado para la prueba de estrés en los controladores

		Treatments		
		System A	System B	System C
Blocks	Controller 1	15	15	18
	Controller 2	14	14	14
	Controller 3	10	11	15
	Controller 4	13	12	17
	Controller 5	16	13	16
	Controller 6	13	13	13

Resumen de los datos recolectados para la prueba de estrés en los controladores de tráfico aéreo

		Tratamientos			Totales de fila o de bloque	Medias por bloque
		Sistema A	Sistema B	Sistema C		
Bloques	Controlador 1	15	15	18	48	$\bar{x}_{1\cdot} = 48/3 = 16.0$
	Controlador 2	14	14	14	42	$\bar{x}_{2\cdot} = 42/3 = 14.0$
	Controlador 3	10	11	15	36	$\bar{x}_{3\cdot} = 36/3 = 12.0$
	Controlador 4	13	12	17	42	$\bar{x}_{4\cdot} = 42/3 = 14.0$
	Controlador 5	16	13	16	45	$\bar{x}_{5\cdot} = 45/3 = 15.0$
	Controlador 6	13	13	13	39	$\bar{x}_{6\cdot} = 39/3 = 13.0$
Totales de columna o de tratamiento		81	78	93	252	$\bar{\bar{x}} = \frac{252}{18} = 14.0$
Medias por tratamiento		$\bar{x}_{\cdot 1} = \frac{81}{6} = 13.5$	$\bar{x}_{\cdot 2} = \frac{78}{6} = 13.0$	$\bar{x}_{\cdot 3} = \frac{93}{6} = 15.5$		

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$

H_a: no todas las medias poblacionales son iguales

Juan Pablo Sucre Reyes

4.1 Procedimiento ANOVA

- Requiere la partición de la suma total de los cuadrados (STC) en 3 grupos:

$$STC = SCTR + SCBL + SCE$$

- donde:

k = número de tratamientos
b = número de bloques
n_T = tamaño muestral total ($n_T = kb$)

Tabla ANOVA para el diseño de bloques aleatorizado con k tratamientos y b bloques

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	valor-p
Tratamientos	SCTR	$k - 1$	$CMTR = \frac{SCTR}{k-1}$	$\frac{CMTR}{CME}$	
Bloques	SCBL	$b - 1$	$CMBL = \frac{SCBL}{b-1}$		
Error	SCE	$(k-1)(b-1)$	$CME = \frac{SCE}{(k-1)(b-1)}$		
Total	STC	$n_T - 1$			

- *Ejemplo: Como resultado de un estudio para medir la fatiga y el estrés de ….*
- *Solución: Al emplear bloques, se eliminan del término CME las diferencias individuales de los controladores y se obtiene una prueba más sólida para las diferencias de estrés (μ_1, μ_2, μ_3) entre las tres alternativas de estaciones de trabajo.*
- *Como cada sujeto usará todos los sistemas, esto es un diseño de bloques completo.*
- *Se proporciona un valor F para probar los efectos de los tratamientos pero no de los bloques; ya que el diseño prueba un solo factor: el diseño de la estación de trabajo.*

Juan Pablo Sucre Reyes

4.2 Cálculos y conclusiones

• El estadístico F probará si existe diferencia entre las *(μ_1, μ_2, μ_3)* con:

x_{ij} = valor de la observación correspondiente al tratamiento j en el bloque i
$\bar{x}_{\cdot j}$ = media muestral del tratamiento j-ésimo
$\bar{x}_{i\cdot}$ = media muestral para el bloque i-ésimo
$\bar{\bar{x}}$ = media muestral general

Paso 1. Calcular la suma total de cuadrados (STC).

$$\text{STC} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{\bar{x}})^2$$

Paso 2. Estimar la suma de cuadrados debido a los tratamientos (SCTR).

$$\text{SCTR} = b\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}})^2$$

Paso 3. Calcular la suma de cuadrados debido a los bloques (SCBL).

$$\text{SCBL} = k\sum_{i=1}^{b}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2$$

Paso 4. Determinar la suma de cuadrados debido al error (SCE).

$$\text{SCE} = \text{STC} - \text{SCTR} - \text{SCBL}$$

Paso 1. $\text{STC} = (15-14)^2 + (15-14)^2 + (18-14)^2 + \cdots + (13-14)^2 = 70$
Paso 2. $\text{SCTR} = 6[(13.5-14)^2 + (13.0-14)^2 + (15.5-14)^2] = 21$
Paso 3. $\text{SCDL} = 3[(16-14)^2 + (14-14)^2 + (12-14)^2 + (14-14)^2 + (15-14)^2 + (13-14)^2] = 30$
Paso 4. $\text{SCE} = 70 - 21 - 30 = 19$

•*Ejemplo: Como resultado de un estudio para medir la fatiga y el estrés de ….*

•*Solución: Desarrollados los cálculos, se obtiene la tabla ANOVA y con ellos se probará:*

Fuentes de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	valor-p
Tratamientos	21	2	10.5	10.5/1.9 = 5.53	0.024
Bloques	30	5	6.0		
Error	19	10	1.9		
Total	70	17			

• *Paso 1: Establecer H_0 y H_a :* H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$
H_a: no todas las medias poblacionales son iguales

• *Paso 2: Especificar el nivel de significancia: siendo α = 0,05.*

$$F = \frac{\text{CMTR}}{\text{CME}} = \frac{10.5}{1.9} = 5.53$$

• *Paso 3: Recabar datos muestrales y calcular el valor del estadístico de prueba F:*

•*Método del valor-p*

•*Paso 4. Emplear el valor F para calcular el valor-p:* Minitab 15▸ 0.024

• *El valor-p = 0,010 a 0,025. (Tablas F; 2 y 10 g.l.)*

• *Paso 5. Regla de decisión: Como valor-p < α=0,05$\Rightarrow$ H_0 es rechazada (las μ_1, μ_2, μ_3 de los niveles de estrés en las 3 alternativas de estación no son iguales)*

Juan Pablo Sucre Reyes

4. Diseño de bloques aleatorizado

Minitab 15▸ 24. Un vendedor de automóviles realiza una prueba para determinar si el tiempo en minutos que se necesita para afinar un motor pequeño depende de si se utiliza un analizador de motor computarizado o uno electrónico. Debido a que el tiempo de afinación varía entre automóviles compactos, medianos y grandes, en el experimento se utilizaron los tres tipos de vehículos como bloques. Los datos obtenidos se indican a continuación.

		Analizador	
		Computarizado	Electrónico
Automóvil	Compacto	50	42
	Mediano	55	44
	Grande	63	46

Use α = 0.05 y pruebe si existen cualesquiera diferencias significativas.

Minitab 15▸ 26. El Examen de aptitud escolar (SAT, por sus siglas en inglés) contiene tres secciones: lectura crítica, matemáticas y redacción. Cada parte se califica en una escala de 800 puntos. La información de las puntuaciones del examen para la versión 2009 del SAT está disponible en el sitio web del College Board. Una muestra de las puntuaciones alcanzadas por seis estudiantes (Student) en el SAT se lista enseguida para lectura crítica (Critical Reading), matemáticas (Mathematics) y redacción (Writing).

Student	Critical Reading	Mathematics	Writing
1	526	534	530
2	594	590	586
3	465	464	445
4	561	566	553
5	436	478	430
6	430	458	420

a) Utilizando un nivel de significancia de 0.05, ¿los estudiantes se desempeñan de manera distinta en las tres partes del examen?

b) ¿Cuál sección parece darles más problemas? Explique.

Juan Pablo Sucre Reyes

4. Diseño de bloques aleatorizado

Minitab 15

25. Las vitaminas y otros suplementos para la salud se han encarecido durante los años recientes y, con frecuencia, los precios establecidos por los distintos minoristas varían en gran medida. Los datos a continuación listan los precios de 13 productos (Item) de cuatro minoristas en Rochester, Nueva York (*Democrat and Chronicle*, 13 de febrero de 2005).

Item	CVS	Kmart	Rite-Aid	Wegmans
Caltrate +D (600 mg/60 tabletas)	8.49	5.99	7.99	5.99
Centrum (130 tabletas)	9.49	9.47	9.89	7.97
Aceite de hígado de bacalao (100 tabletas en gel)	2.66	2.59	1.99	2.69
Aceite de pescado (1,000 mg/60 tabletas)	6.19	4.99	4.99	5.99
Vitaminas para niños (60 tabletas)	7.69	5.99	5.99	6.29
Ácido fólico (400 mcg/250 tabletas)	2.19	2.49	3.74	2.69
One a Day Maximum (100 tabletas)	8.99	7.49	6.99	6.99
One-a-Day Scooby (50 tabletas)	7.49	5.99	6.49	5.47
Poly-Vi-Sol (gotas, 50 ml)	9.99	8.49	9.99	8.37
Vitamina B-12 (100 mcg/100 tabletas)	3.59	1.99	1.99	1.79
Vitamina C (500 mg/100 tabletas)	2.99	2.49	1.99	2.39
Vitamina E (200 UI/100 tabletas)	4.69	3.49	2.99	3.29
Zinc (50 mg/100 tabletas)	2.66	2.59	3.99	2.79

Use $\alpha = 0.05$ y pruebe si existe alguna diferencia significativa entre los precios medios de los cuatro minoristas.

Juan Pablo Sucre Reyes

5. Experimento factorial

• Diseño para obtener conclusiones simultáneas acerca de dos o más factores. Las condiciones experimentales incluyen todas las posibles combinaciones de los factores (*para a niveles del factor A y b niveles del factor B, se incluye ab combinaciones*).

•*Ejemplo: Con la intención de mejorar el desempeño en el test GMAT, la U de Texas ofrece 3 programas de preparación (sesión de 3 horas, programa de 1 día, curso intensivo de 10 semanas). Los aplicantes pueden ser de 3 licenciaturas: negocios, ingeniería, artes y ciencias. Se generan así las condiciones experimentales (combinaciones) respectivas….*

		Factor B: licenciatura		
		Negocios	Ingeniería	Artes y ciencias
Factor A:	Repaso de tres horas	1	2	3
programa	Programa de un día	4	5	6
de preparación	Curso de 10 semanas	7	8	9

Juan Pablo Sucre Reyes

5. Experimento factorial

•*Ejemplo: Se toma una muestra de 2 sujetos (replicaciones) para cada una de las combinaciones de tratamientos (se tomen aleatoriamente 6 estudiantes y cada 2 deben ser asignados de manera aleatoria a un programa). Cumplidos los programas, luego tomaron el GMAT con puntuaciones obtenidas diferenciadas (PO).*

•*Efecto principal (factor A): ¿Los programas tienen efectos diferentes sobre la PO?*

•*Efecto principal (factor B: ¿Las licenciaturas tienen efectos diferentes sobre la PO?*

•*Efecto de interacción (factores A y B): ¿Es uno de los programas de preparación mejor para aquellos que provienen de una de las 3 licenciaturas, mientras que para los de otras licenciaturas es mejor otro de los programas?*

•*Solución: habrá un total de 3 x 3 = 9 combinaciones.*

		Factor B: College		
		Business	Engineering	Arts and Sciences
Factor A: Preparation Program	Three-hour review	500	540	480
		580	460	400
	One-day program	460	560	420
		540	620	480
	10-week course	560	600	480
		600	580	410

5.1 Procedimiento ANOVA (experimento factorial de 2 factores)

• Requiere la partición de la suma total de cuadrados (STC) en 4 grupos:

$$STC = SCA + SCB + SCAB + SCE$$

•don

a = número de niveles del factor A

b = número de niveles del factor B

r = número de replicaciones

n_T = número total de observaciones realizadas en el experimento; $n_T = abr$

Tabla ANOVA para el experimento factorial de dos factores con r replicaciones

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	F	valor-p
Factor A	SCA	$a-1$	$CMA = \frac{SCA}{a-1}$	$\frac{CMA}{CME}$	
Factor B	SCB	$b-1$	$CMB = \frac{SCB}{b-1}$	$\frac{CMB}{CME}$	
Interacción	SCAB	$(a-1)(b-1)$	$CMAB = \frac{SCAB}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{CMAB}{CME}$	
Error	SCE	$ab(r-1)$	$CME = \frac{SCE}{ab(r-1)}$		
Total	STC	n_T-1			

5.2 Cálculos y conclusiones

• El estadístico F probará la significancia del factor A, del factor B y de la interacción:

• Sea:

x_{ijk} = observación correspondiente a la k-ésima réplica tomada del tratamiento i del factor A y del tratamiento j del factor B

$\bar{x}_{i\cdot}$ = media muestral de las observaciones en el tratamiento i (factor A)

$\bar{x}_{\cdot j}$ = media muestral de las observaciones en el tratamiento j (factor B)

$\bar{x}_{ij}$ = media muestral de las observaciones correspondientes a la combinación del tratamiento i (factor A) y el tratamiento j (factor B)

$\bar{\bar{x}}$ = media muestral general de todas las n_T observaciones

con:

Paso 1. Calcular la suma total de cuadrados.

$$STC = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(x_{ijk} - \bar{\bar{x}})^2$$

Paso 2. Calcular la suma de cuadrados del factor A.

$$SCA = br\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{\bar{x}})^2$$

Paso 3. Calcular la suma de cuadrados del factor B.

$$SCB = ar\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{\bar{x}})^2$$

Paso 4. Calcular la suma de cuadrados debido a la interacción.

$$SCAB = r\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{\bar{x}})^2$$

Paso 5. Calcular la suma de cuadrados debido al error.

$$SCE = STC - SCA - SCB - SCAB$$

•*Ejemplo: Con la intención de mejorar el desempeño en el test GMAT, la U de Texas….*

•*Solución: datos ob*

necesarias para las

Resumen de los datos del examen GMAT para el experimento de dos factores

Totales de combinación de tratamiento	Factor B: licenciatura: Negocios	Ingeniería	Artes y ciencias	Totales de fila	Medias del factor A
Repaso de tres horas	500, 580; 1080; $\bar{x}_{11} = \frac{1080}{2} = 540$	540, 460; 1000; $\bar{x}_{12} = \frac{1000}{2} = 500$	480, 400; 880; $\bar{x}_{13} = \frac{880}{2} = 440$	2960	$\bar{x}_{1\cdot} = \frac{2960}{6} = 493.33$
Programa de un día (Factor A: programa de preparación)	460, 540; 1000; $\bar{x}_{21} = \frac{1000}{2} = 500$	560, 620; 1180; $\bar{x}_{22} = \frac{1180}{2} = 590$	420, 480; 900; $\bar{x}_{23} = \frac{900}{2} = 450$	3080	$\bar{x}_{2\cdot} = \frac{3080}{6} = 513.33$
Curso de 10 semanas	560, 600; 1160; $\bar{x}_{31} = \frac{1160}{2} = 580$	600, 580; 1180; $\bar{x}_{32} = \frac{1180}{2} = 590$	480, 410; 890; $\bar{x}_{33} = \frac{890}{2} = 445$	3230	$\bar{x}_{3\cdot} = \frac{3230}{6} = 538.33$
Totales de columna	3240	3360	2670	9270	Total general
Medias del factor B	$\bar{x}_{\cdot 1} = \frac{3240}{6} = 540$	$\bar{x}_{\cdot 2} = \frac{3360}{6} = 560$	$\bar{x}_{\cdot 3} = \frac{2670}{6} = 445$	$\bar{\bar{x}} = \frac{9270}{18} = 515$	

5.2 Cálculos y conclusiones

• *Ejemplo: Con la intención de mejorar el desempeño en el test GMAT, la U de Texas….*

•*Solución: Desarrollados los cálculos, se obtiene la tabla ANOVA y con ellos se probará:*

Paso 1. $STC = (500 - 515)^2 + (580 - 515)^2 + (540 - 515)^2 + \cdots + (410 - 515)^2 = 82\,450$

Paso 2. $SCA = (3)(2)[(493.33 - 515)^2 + (513.33 - 515)^2 + (538.33 - 515)^2] = 6\,100$

Paso 3. $SCB = (3)(2)[(540 - 515)^2 + (560 - 515)^2 + (445 - 515)^2] = 45\,300$

Paso 4. $SCAB = 2[(540 - 493.33 - 540 + 515)^2 + (500 - 493.33 - 560 + 515)^2 + \cdots + (445 - 538.33 - 445 + 515)^2] = 11\,200$

Paso 5. $SCE = 82\,450 - 6\,100 - 45\,300 - 11\,200 = 19\,850$

Pantalla de resultados de Minitab para el diseño de dos factores del examen GMAT

SOURCE	DF	SS	MS	F	P
Factor A	2	6100	3050	1.38	0.299
Factor B	2	45300	22650	10.27	0.005
Interaction	4	11200	2800	1.27	0.350
Error	9	19850	2206		
Total	17	82450			

• *Paso 1: Establecer H_0 y H_a (tanto para el factor A, factor B, y la interacción)*

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$

H_a: no todas las medias poblacionales son iguales

• *Paso 2: Especificar el nivel de significancia: siendo α = 0,05.*

• *Paso 3: Recabar datos muestrales y calcular el valor F: (factor A, B, y la interacción)*

•*Método del valor-p*

Minitab 15 ▸

•*Paso 4. Emplear el valor F para calcular el valor-p:*

• *El valor-p (∃ diferencias significativas entre los 3 programas: factor A) = 0,299.*

• *El valor-p (∃ diferencias significativas entre las 3 licenciaturas: factor B) = 0,005.*

• *El valor-p (∃ efecto significativo por la interacción AB) = 0,350.*

• *Paso 5. Regla de decisión:*

• *Como valor-p = 0,299 > α=0,05⇒ H_0 no es rechazada (no ∃ diferencia significativa entre las μ_i de las puntuaciones obtenidas para los 3 programas de preparación).*

• *Como valor-p = 0,005 < α=0,05⇒ H_0 es rechazada (∃ diferencia significativa entre las μ_i de las puntuaciones obtenidas entre las 3 licenciaturas).*

• *Como valor-p = 0,350 > α=0,05⇒ H_0 no es rechazada (no ∃ efecto significativo por la interacción AB).*

5.2 Cálculos y conclusiones

• *Ejemplo: Con la intención de mejorar el desempeño en el test GMAT, la U de Texas….*

•*Solución: Desarrollados los cálculos, se obtiene la tabla ANOVA y con ellos se probará:*

Minitab 15

Pantalla de resultados de Minitab para el diseño de dos factores del examen GMAT

SOURCE	DF	SS	MS	F	P
Factor A	2	6100	3050	1.38	0.299
Factor B	2	45300	22650	10.27	0.005
Interaction	4	11200	2800	1.27	0.350
Error	9	19850	2206		
Total	17	82450			

• *Conclusiones:*

• *Los tres programas de preparación NO difieren en su capacidad de capacitación.*

• *La licenciatura sí es un factor significativo (por las tres medias muestrales es posible anticipar que no hay diferencia entre los alumnos con las licenciaturas de ingeniería:560 y negocios:540; pero los de artes y ciencias:445 parecen estar menos preparados)*

5. Inferencias acerca de dos varianzas poblacionales

Minitab 15

31. Un parque de diversión estudió algunos métodos para reducir el tiempo de espera (en minutos) al bajar y subir a los pasajeros a los juegos. Se propusieron dos métodos para realizar estas tareas. Para tomar en cuenta las diferencias potenciales debido al tipo de juego y a la interacción que puede haber entre tipo de juego y método de subir y bajar a los pasajeros, se diseñó un experimento factorial. Use los datos siguientes para probar cualquier efecto significativo debido al método de subir y bajar a los pasajeros, el tipo de juego y la interacción. Use $\alpha = 0.05$.

	Tipo de juego		
	Montaña rusa	Rueda de la fortuna	Tobogán
Método 1	41 43	52 44	50 46
Método 2	49 51	50 46	48 44

5. Inferencias acerca de dos varianzas poblacionales

Minitab 15 ►

32. En un estudio diseñado para comparar vehículos híbridos (Hybrid) y convencionales (Conventional) con equipo similar, *Consumer Reports* probó varias clases de automóviles híbridos, automóviles a gasolina y vehículos utilitarios deportivos (SUV). Los datos siguientes muestran la clasificación en millas por galón que *Consumer Reports* obtuvo para dos automóviles compactos (Small Car) híbridos, dos automóviles medianos (Midsize Car) híbridos, dos SUV compactos (Small SUV) híbridos y dos SUV medianos (Midsize SUV) híbridos; también se muestra el rendimiento en millas por galón obtenidas de ocho modelos convencionales con equipo similar (*Consumer Reports*, octubre de 2008). Make/Model indica fabricante y modelo; Class (clase), Type (tipo) y MPG (millas por galón).

Make/Model	Class	Type	MPG
Honda Civic	Small Car	Hybrid	37
Honda Civic	Small Car	Conventional	28
Toyota Prius	Small Car	Hybrid	44
Toyota Corolla	Small Car	Conventional	32
Chevrolet Malibu	Midsize Car	Hybrid	27
Chevrolet Malibu	Midsize Car	Conventional	23
Nissan Altima	Midsize Car	Hybrid	32
Nissan Altima	Midsize Car	Conventional	25
Ford Escape	Small SUV	Hybrid	27
Ford Escape	Small SUV	Conventional	21
Saturn Vue	Small SUV	Hybrid	28
Saturn Vue	Small SUV	Conventional	22
Lexus RX	Midsize SUV	Hybrid	23
Lexus RX	Midsize SUV	Conventional	19
Toyota Highlander	Midsize SUV	Hybrid	24
Toyota Highlander	Midsize SUV	Conventional	18

Realice pruebas para encontrar efectos significativos debido a la clase, tipo e interacción con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

GRACIAS POR SU ATENCIÓN…..